

Varianta 056

SUBIECTUL I

- a) 5.
- b) $7\sqrt{2}$.
- c) -1.
- d) $1+i$.
- e) $y=5$.
- f) 0.

SUBIECTUL II

- 1.
- a) -2.
- b) 2.
- c) 9.
- d) 64.
- e) $f(x) = -x + 4$.
- 2.
- a) $\sqrt{2}$.
- b) $\cos x - \sin x$.
- c) 1
- d) 2.
- e) 1.

SUBIECTUL III

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $B = A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 120 \end{pmatrix}$.

$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 120 \end{vmatrix} = 480$.

c) $f(A) = A^2 - 4A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$.

d) Din $x^2 - 4x + 3 = 0$ obținem $x_1 = 1, x_2 = 3$.

e) Din $x^2 - 3x + 2 = 0$ obținem $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Deci ecuațiile $f(x) = 0$ și $g(x) = 0$ au o soluție comună $x = 1$.

f) Ecuațiile $f(x) = 0$ și $g(x) = 0$ au o soluție comună $x = 1$.

Obținem $2^t = 1$, sau $t = 0$.

g) Fie $h = aX^3 + bX^2 + cX + d, a, b, c, d \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

$aX^3 + bX^2 + cX + d = (X^2 - 3X + 2)(mX + n) + X + 1, m, n \in \mathbf{R}$.

Obținem $a + b + c + d = 2$ și $8a + 4b + 2c + d = 3$.

Alegem $a = 1, b = 0, c = -6$.

Atunci $d = 7$.

Un exemplu de polinom h , de gradul al treilea, care împărțit la polinomul g

să dea restul $X + 1$ este $h = X^3 - 6X + 7$.

SUBIECTUL IV

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Atunci $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f .

b) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$.

c) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

d) Cum $f'(x) > 0, \forall x \in [0, \infty)$, atunci funcția f este crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$

e) $\int_0^1 f(x^2) dx = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx = 1 - 2(\arctan 1 - \arctan 0) = 1 - \frac{\pi}{2}$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} = 0$.